

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ 24.02.2017**  
**CLASA a XI-a**

**Subiectul I. (7 puncte)**

Fie matricea  $A_n = \begin{pmatrix} 1 + \ln \frac{n+1}{n} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 + \ln \frac{n+2}{n+1} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \ln \frac{n+3}{n+2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \ln \frac{2n}{2n-1} \end{pmatrix}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Definim șirurile de numere reale  $x_n = \det A_n$  și  $y_n = \det[A_n - I_n]$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Demonstrați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent;

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + y_n)^{2017} - 1}{y_n}$ .

*prof. Raul Domșa, Liceul Teoretic "Petru Maior" Gherla*

**Subiectul II. (7 puncte)**

Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}}{n}$ .

*student Paul Helmer, (component al lotului județean la ONM)*

**Subiectul III. (7 puncte)**

a) Fie  $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$  astfel încât  $A \cdot B = B \cdot A$ ,  $\det(A) = 7$  și  $\det(A + \sqrt{7} \cdot B) = 0$ . Să se calculeze  $\det(A^2 + B^2 + A \cdot B)$ .

*prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca*

b) Fie matricele  $A, B, C \in M_2(R)$  care comută între ele și verifică condițiile:

i)  $\det(ABC) > 0$ ;    ii)  $\det(A + B + C) = 0$     și    iii)  $\det(A^3 + B^3 + C^3) < 0$ .

Să se arate că  $\det(A^3 + B^3 + C^3 - 4ABC) > 0$

*Prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej*

**Subiectul IV. (7 puncte)**

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arcsin \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}$ .

*prof. Mirela Blaga, Liceul Teoretic "Alexandru Papiu Ilarian" Dej*

**Toate subiectele sunt obligatorii.**  
**Timp efectiv de lucru - 3 ore.**

**SUCCES!**